Übersicht Stochastik

Wahrscheinlichkeiten

Zufallsexperimente und Begriffe

Wir bezeichnen als **Zufallsexperiment** (oder Zufallsversuch) einen Versuch, bei dem mehrere Ergebnisse möglich sind, aber dessen Ausgang nicht vorausgesagt werden kann.
Das Resultat eines Zufallsexperiments wird als **Ergebnis** bezeichnet.
Alle bei einem Experiment möglichen Ergebnisse bilden den **Ergebnisraum Ω**. Beispiel beim Würfeln: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Fasst man ein oder mehrere Ergebnisse eines Zufallsexperimentes in einer Menge zusammen, so nennt man dies ein **Ereignis**.
Einelementige Ereignisse nennt man **Elementarereignisse**.
Ein Ereignis, das nicht eintreten kann, nennt man **unmögliches Ereignis**.
Besteht ein Ereignis aus den gleichen Elementen wie der Ergebnisraum Ω, ist also $E = \Omega$, so nennt man das Ereignis ein **sicheres Ereignis**.

Erklärvideo

Wahrscheinlichkeit

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis nicht angeben können, dann müssen wir das Zufallsexperiment „sehr oft“ durchführen. Diese Stabilisierung der relativen Häufigkeiten bezeichnet man als das **„Gesetz der großen Zahlen“**. Die relative Häufigkeit bei sehr vielen Wiederholungen ist eine gute Abschätzung für die **Wahrscheinlichkeit P** des Ergebnisses E. Schreibweise: P(E)

Erklärvideo

Gegenereignis

Das **Gegenereignis $\bar{E}$** tritt genau dann ein, wenn das Ereignis E nicht eintritt. Ereignis und Gegenereignis schließen sich somit gegenseitig aus.

Manchmal ist es sinnvoll, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über das Gegenereignis zu bestimmen.

Es ist $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ bzw. $P(E) = 1 - P(\bar{E})$

Erklärvideo

Laplace-Experiment

Ein **Laplace-Experiment** ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Beispiele für Laplace-Experimente sind das Würfeln oder Werfen einer Münze.
Besteht der Ergebnisraum Ω aus n verschiedenen Elementarereignissen, ist also $|\Omega| = n$, dann gilt:

$$P(E) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Für Laplace-Experimente können Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse, die aus mehreren Ergebnissen bestehen, recht einfach bestimmt werden:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl alle Ergebnisse}} = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Erklärvideo

Schnitt- und Vereinigungsmenge, Mengenlehre

Vereinigungsmenge $A \cup B$: Alle Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen vorkommen (**ODER**)

Schnittmenge $A \cap B$: Alle Elemente, die in beiden Mengen vorkommen (**UND**)

Für die Anzahl der Elemente gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

und für die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Erklärvideo

Mehrstufige Zufallsexperimente

Mehrstufige Zufallsexperimente sind Experimente, die mehrere Male (n-mal) hintereinander ausgeführt werden. Die Ergebnisse n-stufiger Zufallsexperimente sind sog. n-Tupel ($e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$), wobei e_i das Ergebnis des i-ten Teilexperiments ist.

Für eine übersichtliche Darstellung wählt man in der Stochastik meist das **Baumdiagramm**. Dies hilft auch, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Mehrstufige Zufallsexperimente sind z.B. das mehrmalige Werfen einer Münze, das mehrmalige Würfeln oder das wiederholte Ziehen einer Kugel aus einer Urne (**Urnenmodell**).

Erklärvideo

Baumdiagramm

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zum Ergebnis führt.

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe aller Ergebniswahrscheinlichkeiten, die zum Ereignis dazugehören.

Erklärvideo

Kombinatorik – Stichproben und Abzählverfahren

Für mehrstufige **Laplace-Experimente** verzichtet man oft auf Baumdiagramme und nutzt kombinatorische Abzählverfahren. Dabei simuliert man das Experiment durch das Ziehen von Kugeln aus einer Urne. Dafür muss man die folgenden Fragen beantworten:

- Wie viele Kugeln sind in der Urne? ($\rightarrow$ n)
- Wie oft ziehe ich aus der Urne? ($\rightarrow$ k)
- Werden die Kugeln nach dem Zug zurückgelegt? ($\rightarrow$ Mit oder ohne Zurücklegen)
- Ist die Reihenfolge der gezogenen Kugeln wichtig? ($\rightarrow$ Geordnete oder ungeordnete Stichprobe)

Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen:

Für die **Anzahl N** der möglichen Anordnungen (k-Tupel) gilt dann:

$$N = n^k$$

Beispiel: Fußball-Toto

Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen:

Für die **Anzahl N** der möglichen Anordnungen (k-Tupel) gilt dann:

$$N = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel: Siegertreppchen-Fotos beim Wettkampf

Erklärvideo

Geordnete Vollerhebung

Hier handelt es sich um den **Sonderfall der Geordneten Stichprobe ohne Zurücklegen**, bei dem **alle** Kugeln gezogen werden, es gilt also **n = k**.
Für die **Anzahl N** der möglichen Anordnungen (k-Tupel) gilt dann:

$$N = n!$$

Beispiel: Anordnung von n Elementen ergibt n! **Permutationen**

Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen:

Für die **Anzahl N** der möglichen Anordnungen (k-Tupel) gilt dann:

$$N = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \quad (\textbf{Binomialkoeffizient})$$

Beispiel: Lotto 6 aus 49 ziehen

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Man betrachtet eine Wahrscheinlichkeit P(A) für ein Ereignis A. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, ändert sich jedoch ggf., wenn bereits ein Ereignis B eingetreten ist. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer **bedingten Wahrscheinlichkeit** und schreibt $P_B(A)$, also die „Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B“
Es gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Im Allgemeinen ist $P_B(A) \neq P(A)$. Dann nennt man A **abhängig** von B. Wird die Wahrscheinlichkeit P(A) jedoch durch das Eintreten des Ereignisses B nicht geändert, gilt also $P_B(A) = P(A)$ und auch umgekehrt $P_A(B) = P(B)$, so nennt man A und B **unabhängige Ereignisse**.

Erklärvideo

Unabhängigkeit nachweisen:

Rechnerisch: $\mathbf{P(A) = P_B(A)}$ bzw. $\mathbf{P(B) = P_A(B)}$

Im Baumdiagramm: Die Wahrscheinlichkeit in Teilbäumen, die zum selben Ereignis führen, sind gleich.

In der Vierfeldertafel: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

Vierfeldertafel

Wenn nur 2 Merkmale mit je 2 Ausprägungen vorhanden sind, können statistische Daten recht übersichtlich in einer **Vierfeldertafel** dargestellt werden. Diese können mit absoluten oder mit relativen Häufigkeiten ausgefüllt sein. Fehlende Werte lassen sich zeilen- oder spaltenweise durch addieren bzw. subtrahieren ermitteln.

	B (B)	Nicht B ($\bar{B}$)	SUMME
A (A)	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
Nicht A ($\bar{A}$)	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
SUMME	$P(B)$	$P(\bar{B})$	100%

Erklärvideo

Hier lässt sich die Unabhängigkeit der beiden Merkmale einfach überprüfen: **unabhängig** $\Leftrightarrow$ $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

Zusammenhang zwischen Baumdiagramm und Vierfeldertafel

Im Vergleich sieht man hier welche Wahrscheinlichkeiten an welchen Stellen der Vierfeldertafel und des Baumdiagramms abzulesen sind. Bedingte Wahrscheinlichkeiten finden sich in der Vierfeldertafel nicht. Diese müssen erst berechnet werden.

Vierfeldertafel

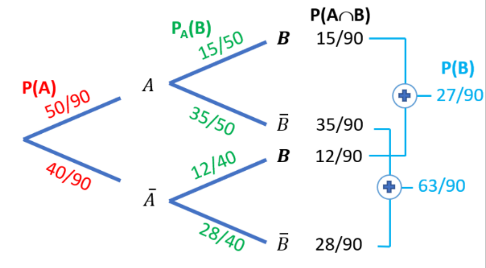
P(A∩B)

	B	$\overline{B}$	Σ
A	15/90	35/90	50/90
$\overline{A}$	12/90	28/90	40/90
Σ	27/90	63/90	1

P(A)

P(B)

Baumdiagramm



Lernblatt

Bernoulli-Formel

Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es nur darum geht, ob ein Ereignis A eingetreten ist oder nicht.

- Das Eintreten von A bezeichnet man als **Treffer T** bzw. Erfolg.
- Das Eintreten von A bezeichnet man als **Niete N** bzw. Misserfolg.

Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal durchgeführt und sind die einzelnen Experimente dabei **unabhängig** voneinander, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette**. n heißt dabei die **Länge der Bernoulli-Kette**.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A mit Trefferwahrscheinlichkeit p in der Bernoulli-Kette der Länge n genau k-mal auftritt, gilt die folgende **Bernoulli-Formel**:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}}$$

Der Binomialkoeffizient gibt dabei die Anzahl der Pfade an, die es mit k Treffern gibt. Der Wert von $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Pfad.

Es gibt, je nach Aufgabenstellung, auch die Möglichkeit, dass p oder n gesucht ist. Mehr dazu findet sich im Erklärvideo.

Erklärvideo

Binomialverteilung

Ist X die Trefferanzahl bei einer Bernoulli-Kette, dann nennt man die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung von X eine **Binomialverteilung** mit den Parametern n (Anzahl der Ziehungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit).
Deshalb schreibt man für P(X = k) auch B(n; p; k) oder $B_{n;p}(k)$.

Für manche Aufgaben ("Mindestens-" und "Höchstens"-Aufgaben) werden sogenannte **kumulierte** Wahrscheinlichkeiten P(X ≤ k) berechnet. In ihr sind alle Einzel-Wahrscheinlichkeiten von X = 0 bis zum Wert X = k aufsummiert: $P(X \le k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$
Für die **kumulierte Binomialverteilung** P(X ≤ k) schreibt man auch F(n; p; k) oder $F_{n;p}(k)$.

Erklärvideo

Lösungswege für Aufgaben der Form

„genau k Treffer“:

P(X = k) → einfache Binomialverteilungstabelle

„höchstens k Treffer“:

P(X ≤ k) → kumulierte Binomialverteilungstabelle

„mindestens k Treffer“:

P(X ≥ k) = 1 – P(X ≤ k-1) → kumulierte Binomialverteilungstabelle

„mindestens a und höchstens b Treffer“:

P(a ≤ X ≤ b) = P(X ≤ b) – P(X ≤ a-1) → kumulierte Binomialverteilungstabelle

Ablesen Binomialverteilungstabelle

Die Werte für P (X = k) können in Binomialverteilungstabellen abgelesen werden. Die Tabelle zum entsprechenden Wert von n (hier: n = 10) auswählen. Dann den Schnittpunkt der entsprechenden Zeile (Wert für k) und der entsprechenden Spalte (Wert für p) ermitteln.

Binomialverteilung B (10, p , k)

		p												
n	k	0,02	0,03	0,05	0,1	0,1667	0,2	0,25	0,3	0,3333	0,4	0,5		
10	0	0,8171	0,7374	0,5987	0,3487	0,1615	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0060	0,0010	10	10
	1	0,1667	0,2281	0,3151	0,3874	0,3230	0,2684	0,1877	0,1211	0,0867	0,0403	0,0098	9	
	2	0,0153	0,0317	0,0746	0,1937	0,2907	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1209	0,0439	8	
	3	0,0008	0,0026	0,0105	0,0574	0,1550	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2150	0,1172	7	
	4	0,0000	0,0001	0,0010	0,0112	0,0543	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2508	0,2051	6	
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0015	0,0130	0,0264	0,0584	0,1029	0,1366	0,2007	0,2461	5	
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0022	0,0055	0,0162	0,0368	0,0569	0,1115	0,2051	4	
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0031	0,0090	0,0163	0,0425	0,1172	3	
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0030	0,0106	0,0439	2	
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0016	0,0098	1	
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0	
		0,98	0,97	0,95	0,9	0,8333	0,8	0,75	0,7	0,6667	0,6	0,5	k	n
		p quer												

Erklärvideo

Die Werte für P(X ≤ k) sind auf die gleiche Art und Weise aus der kumulierten Binomialverteilungstabelle zu entnehmen.

Eigenschaften der Binomialverteilung

Bei festgelegter Ziehungsanzahl n und bei veränderlicher Trefferwahrscheinlichkeit p gilt:

1. Je größer p, desto weiter rechts (bei größeren k) liegt das Maximum der Verteilung
2. Für p = 0,5 ist die Verteilung symmetrisch
3. Es gilt die Symmetriebeziehung B(n; p; k) = B(n; 1-p; n-k)

Bei gleichbleibender Trefferwahrscheinlichkeit p und veränderlicher Anzahl n gilt:

1. Mit wachsendem n werden die Verteilungen flacher
2. Mit wachsendem n werden die Verteilungen symmetrischer.

Erklärvideo

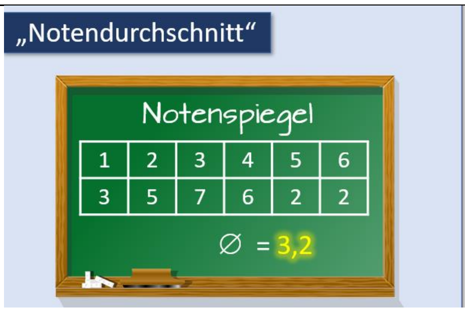
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

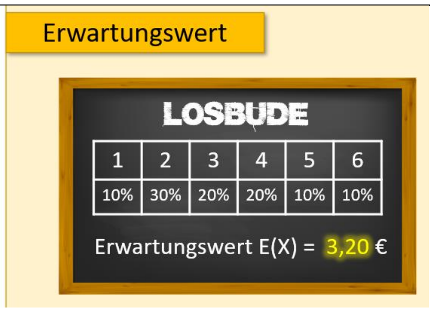
Beim **Notenspiegel** handelt es sich um einen **gewichteten Mittelwert** für eine existierende statistische Erhebung. Dabei werden die Zahlen entsprechend ihrer Häufigkeit gewichtet.

Analog handelt es sich beim **Erwartungswert** um einen **gewichteten Mittelwert** für auf die Zukunft bezogene Werte. Hier werden die Zahlen entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeit gewichtet.

Der Erwartungswert E(X) der Zufallsgröße X berechnet sich als

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i)$$





Bei einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit der Trefferwahrscheinlichkeit p und der Anzahl n ist der Erwartungswert

$$E(X) = n \cdot p$$

Ist bei einem Spiel der Erwartungswert des Gewinns für alle Spieler gleich Null, so spricht man von einem **fairen Spiel**, da dann jeder Spieler die gleichen Gewinnchancen hat.

Die Zahl **Var (X) =** $\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ nennt man die **Varianz** der Zufallsgröße X. Sie ist ein **Maß für die Streuung** der Verteilung.

Die **Quadratwurzel aus der Varianz** $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{Var(X)}$ heißt **Standardabweichung Sigma** der Zufallsgröße X.
Entsprechend wird die Varianz oft auch als σ^2 bezeichnet.

Erklärvideo

Hypothesentests

Hypothesentests nutzt man, wenn man eine Hypothese (**Nullhypothese H_0**) mit Hilfe von erhobenen Daten nachweisen möchte. Dazu stellt man eine gegenteilige Hypothese (**Alternativhypothese H_1**) auf und versucht diese zu widerlegen.
Die Überprüfung erfolgt auf einer Stichprobe (**Stichprobengröße n**).
Natürlich kann man für die Grundgesamtheit damit nie zu 100% sagen, ob die Nullhypothese akzeptiert oder verworfen werden muss. Daher wird das jeweilige **Signifikanzniveau** α angegeben, um die Aussagekraft des Tests und damit den Fehler zu beschreiben. Dies ist meist als 10%, 5% oder 1% vorgegeben.
Je nachdem wie sich die **Wahrscheinlichkeit der Alternativhypothese (p)** gegenüber der **Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese (p_0)** verhält, ist der folgende Test durchzuführen:
$p < p_0 \rightarrow$ Linksseitiger Hypothesentest
$p > p_0 \rightarrow$ Rechtsseitiger Hypothesentest
$p \neq p_0 \rightarrow$ Beidseitiger Hypothesentest
Ziel der Aufgabe ist es aufgrund der Binomialverteilung eine Entscheidungsregel aufzustellen, die aus einem **Annahmebereich A** und einen **Verwerfungsbereich V** besteht.
Der Annahmebereich umfasst die Werte, bei denen man die Nullhypothese bestätigt, der Verwerfungsbereich die Werte, bei denen die Nullhypothese verworfen wird. In letzterem Fall würde man dann die Alternativhypothese favorisieren.

Erklärvideo linksseitiger Test

Erklärvideo rechtsseitiger Test

Linksseitiger Test:

Gesucht ist die **größte Zahl** der Treffer **k** mit **$P(X \leq k) < \alpha$**. Dieser Wert ist aus der kumulierten Binomialverteilungstabelle zu entnehmen. Dann gilt:

Verwerfungsbereich V = {0,1, ..., **k**} und

Annahmebereich A = {**k+1**, k+2, ..., n}

Rechtsseitiger Test:

Gesucht ist die **kleinste Zahl** der Treffer **k** mit $P(X \geq k) < \alpha$ bzw. die **kleinste Zahl k** mit **$P(X \leq k - 1) > 1 - \alpha$**. Dieser Wert ist aus der kumulierten Binomialverteilungstabelle zu entnehmen. Dann gilt:

Verwerfungsbereich V = {**k+1**, k+2, ..., n} und

Annahmebereich A = {0, 1, ..., **k**}

Beidseitiger Test:

Ein beidseitiger Hypothesentest entspricht jeweils einem linksseitigen und einem rechtsseitigen Test mit dem **Signifikanzniveau $\alpha/2$.**

Fehlerberechnung und Alternativtest

Bei Hypothesentest kann es zu folgenden Fehlern kommen:

	Nullhypothese H_0 ist **wahr**	Nullhypothese H_0 ist **falsch**
Versuchsergebnis im **Annahmebereich**	Entscheidung ist richtig	Entscheidung ist falsch **Fehler 2. Art (β-Fehler)**
Versuchsergebnis im **Verwerfungsbereich**	Entscheidung ist falsch **Fehler 1. Art (α-Fehler)**	Entscheidung ist richtig

Fehler 1. Art (α-Fehler): Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler entspricht dem **Signifikanzniveau α**.

Fehler 2. Art (β-Fehler): Die Wahrscheinlichkeit kann nur berechnet werden, wenn p_1 bekannt ist.

Bei einem **Alternativtest** handelt es sich um einen Hypothesentest (links oder rechtsseitig), bei der die Wahrscheinlichkeit der Alternativhypothese gegeben ist. Hier kann auch der β-Fehler berechnet werden.

Erklärvideo