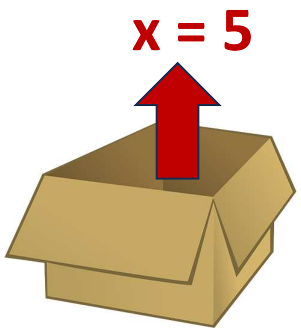
Wert eines Terms

So lange man nicht weiß, wofür die Variablen stehen, d.h. solange wir nur das Paket vor uns liegen haben, kann man Terme zwar vereinfachen, aber man kann nicht den Wert eines Terms bestimmen.

Erst wenn angegeben ist, wofür die Variablen stehen, wenn wir sozusagen das Paket öffnen und hineinschauen, lässt sich der **Wert des Terms** berechnen.



Beispiel:

Term: $2x + 3$

Bestimme den Wert des Terms für **x = 5**

$2 \cdot x + 3$
$= 2 \cdot 5 + 3$
$= 10 + 3$
$= \mathbf{13}$

Der Wert des Terms für **x = 5** ist **13**.

Beispiel:

Term: $2 \cdot (3x + 2y)$

Bestimme den Wert des Terms für **x = 5** und **y = 4**

$2 \cdot (3 \cdot x + 2 \cdot y)$
$= 2 \cdot (3 \cdot 5 + 2 \cdot 4)$
$= 2 \cdot (\ 15 + 8\ )$
$= 2 \cdot 23$
$= \mathbf{46}$

Der Wert des Terms für **x = 5** und **y = 4** ist **46**.

Terme & Termumformungen

Zahl **Rechenzeichen**

$2x + 3$

Variable

Ein **Term** ist ein Ausdruck aus Zahlen, Rechenzeichen und Variablen (Platzhaltern).

Eine Variable ist vergleichbar mit einem Paket. Du weißt nicht genau, welche Zahl drin ist.

$2x + 3 + 5x$

Gleiche Zahl

Kommt eine Variable mehrfach in einem Term vor, so steht sie als Platzhalter immer für dieselbe Zahl.

Produkte vereinfachen

Innerhalb von Produkten gilt das **Kommutativgesetz**: Man kann also einzelne Faktoren **umsortieren**. Dann stellt man als erstes alle Zahlen nach vorne und anschließend alle Variablen in alphabetischer Reihenfolge. Nun kann man das Produkt aus den einzelnen Zahlen bilden und die Variablen, wenn sie mehrfach vorkommen, zu **Potenzen** zusammenfassen.

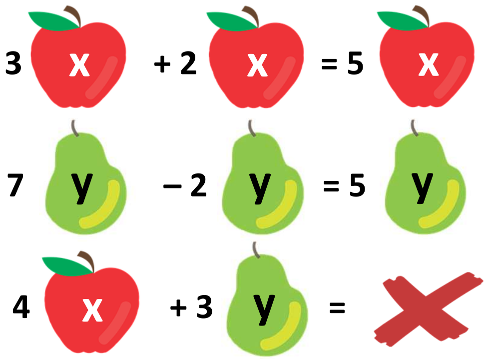
Beispiel:

$3x \cdot y \cdot 2x \cdot 2 \cdot x \cdot 4y$
$= 3 \cdot x \cdot y \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 4 \cdot y$

Sortieren $= \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4}_{48} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{x^3} \cdot \underbrace{y \cdot y}_{y^2}$

Zusammenfassen $= 48 \cdot x^3 \cdot y^2$

Summanden zusammenfassen



Nur **gleichartige Summanden** können zusammengefasst werden.
Und das gilt immer – egal ob bei Obst oder Variablen.

Beispiele:

$2\,x + 5\,x + 3\,x = 10\,x$

$3\,x + 4 + 2\,x - 2 = 3\,x + 2\,x + 4 - 2 = 5\,x + 2$

$4\,x + 7\,y + 2\,x - 2\,y = 4\,x + 2\,x + 7\,y - 2\,y = 6\,x + 5\,y$

Mit Potenzen

Es können Summanden zusammengefasst werden, in denen **gleiche Variablen** in **gleichen Potenzen** vorkommen.

x^2 x^2y xy xy^2

Gleiche Variable, aber nicht in gleichen Potenzen.

$2\,xy + 4\,x^2y = \cancel{}$

Einmal wird das x quadriert und einmal das y.

$3\,x^2y + 5\,xy^2 = \cancel{}$

Beispiele:

$5\,x^2y + 3\,xy + 4\,x^2y - xy = 5\,x^2y + 4\,x^2y + 3\,xy - xy = 9\,x^2y + 2\,xy$

$6\,x^2 + 2\,x^2y - 2\,x^2 + 5\,x^2y = 6\,x^2 - 2\,x^2 + 2\,x^2y + 5\,x^2y = 4\,x^2 + 7\,x^2y$

$4\,xy^2 + 3\,x^2y - 3\,xy^2 = 4\,xy^2 - 3\,xy^2 + 3\,x^2y = xy^2 + 3\,x^2y$

Kombination der Rechenregeln

Wichtig bei umfangreicheren Termen ist es, niemals die **Rechenreihenfolge** zu vergessen. Die Merkhilfe lautet dabei **KLA-PO-PU-STRI**. Hier bedeutet das für dich: Die Strichrechnung kommt erst ganz am Ende.

Rechenreihenfolge

KLAMMER
POTENZ
PUNKT
STRICH

$3 \cdot 4 \cdot a + 2 \cdot (a + 4) + a \cdot (3a + 5) + (2a - 3) - (a + 7) + 5a^2$

$3 \cdot 4 \cdot a + 2 \cdot (a + 4) + a \cdot (3a + 5) + (2a - 3) - (a + 7) + 5a^2$

A B B

$= 12 \cdot a + 2 \cdot a + 2 \cdot 4 + a \cdot 3a + a \cdot 5 + (2a - 3) - (a + 7) + 5a^2$

A C C

$= 12a + 2a + 8 + 3a^2 + 5a + 2a - 3 - a - 7 + 5a^2$

$= \boxed{12a}\ \boxed{+2a}\ \boxed{+8}\ \boxed{+3a^2}\ \boxed{+5a}\ \boxed{+2a}\ \boxed{-3}\ \boxed{-a}\ \boxed{-7}\ \boxed{+5a^2}$

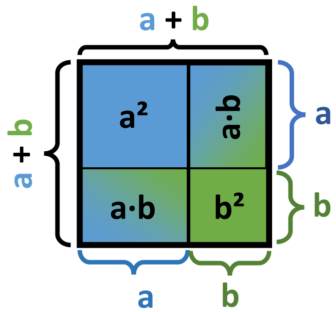
$= \underbrace{\boxed{12a}\ \boxed{+2a}\ \boxed{+5a}\ \boxed{+2a}\ \boxed{-a}}_{20\,a}\ \underbrace{\boxed{+3a^2}\ \boxed{+5a^2}}_{+8\,a^2}\ \underbrace{\boxed{+8}\ \boxed{-3}\ \boxed{-7}}_{-2}$

$= 20\,a + 8\,a^2 - 2$

Vorgehen im Beispiel oben

1. Die Strichrechnung außerhalb aller Klammern wurde rot markiert. Diese kommt als letztes.
2. Vereinfache den Term mit Hilfe der Regeln der vorherigen Seiten, hier mit
   A – Produkte zu Potenzen zusammenfassen
   B – Distributivgesetz – Multiplizieren mit Summen
   C – Klammerregeln
3. Gleichartige Summanden umsortieren (Vorzeichen mitnehmen) und zusammenfassen.

Binomische Formeln



Flächeninhalt Rechteck = Länge · Breite

$$= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$

$$= a^2 + \underbrace{2 \cdot a \cdot b}_{} + b^2$$

Die **binomischen Formeln** sind ein **Spezialfall** der Multiplikation von Summen mit Summen. Bei ihnen stehen in beiden Klammern **dieselben Summanden**. Es gilt zum Beispiel:

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$
$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Die binomische Formeln sind eine **Abkürzung** aus **Ausmultiplizieren** und **Zusammenfassen** gleichartiger Summanden. Wenn man also Rechenzeit sparen will, lernt man sie auswendig.

Die 3 Binomischen Formeln

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Beispiele:

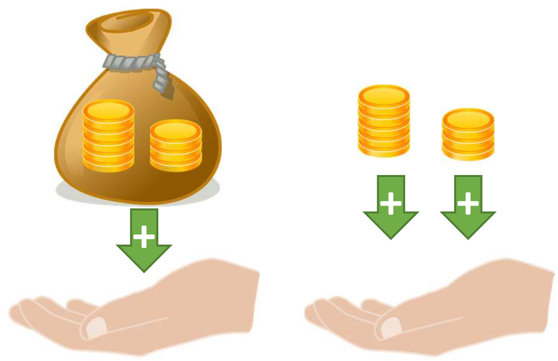
$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$

$(2x + 5y) \cdot (2x - 5y) = (2x)^2 - (5y)^2 = 4x^2 - 25y^2$

Klammerregeln

$10 + (5 + 3) = 10 + 5 + 3$



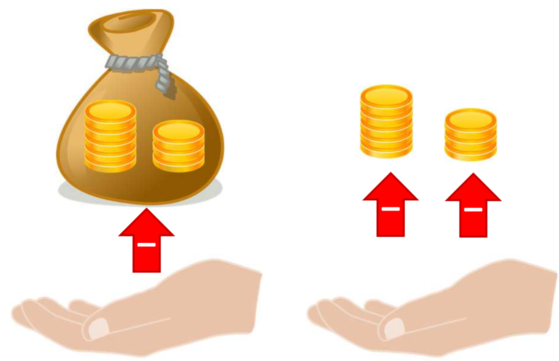
Steht ein **Plus vor der Klammer**, so kann man die **Klammer einfach weglassen**.

Plus-Klammer

$a + (b + c) = a + b + c$

$a + (b - c) = a + b - c$

$10 - (5 + 3) = 10 - 5 - 3$



Steht ein **Minus vor der Klammer**, so muss man die **Vorzeichen in der Klammer wechseln**, wenn man die **Klammer weglässt**.

Minus-Klammer

$a - (b + c) = a - b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

Beispiele: Schreibe ohne Klammer

$y + (x + 3) = y + x + 3$

$5 - (2x + 4) = 5 - 2x - 4$

$7 - (3x - 2 + 4y) = 7 - 3x + 2 - 4y$

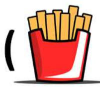
Multiplizieren mit Summen

Das Distributivgesetz in beide Richtungen

Ausmultiplizieren

Produkt → Summe/Differenz

Jeden Summanden in der Klammer mit dem **Faktor** multiplizieren

2 · ( + ) = 2 ·  + 2 · 

$2 \cdot (a + b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

Ausklammern (Faktorisieren)

Summe/Differenz → Produkt

Gleicher **Faktor** wird vor die Klammer gezogen

5 ·  + 5 ·  = 5 · ( + )

$5 \cdot a + 5 \cdot b = 5 \cdot (a + b)$

Es gilt:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Beispiele: Multipliziere aus.

$5 \cdot (3x + 4y) = 5 \cdot 3x + 5 \cdot 4y = 15x + 20y$

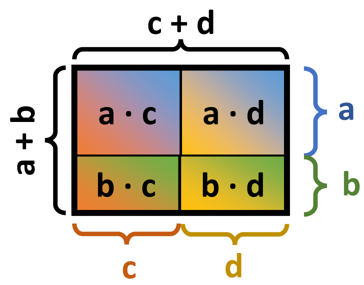
$2x \cdot (4x + 5y) = 2x \cdot 4x + 2x \cdot 5y = 8x^2 + 10xy$

Beispiele: Klammere gemeinsame Faktoren aus.

$12x + 16y + 20 = 4 \cdot (3x + 4y + 5)$

$12x^2y + 8xy^2 = 4xy \cdot (3x + 2y)$

Multiplizieren von Summen mit Summen



Flächeninhalt Rechteck = Länge · Breite

= a · c + a · d + b · c + b · d

Betrachtet man den **Flächeninhalt eines Rechtecks** der **Länge a+b** und der **Breite c+d**, so lässt sich dieser auch als **Summe der vier Einzelflächen** bestimmen. Somit gilt:

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Beim Multiplizieren von Summen mit Summen muss **jeder Summand der ersten Klammer** mit **jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert** werden. Dabei auf die **Vorzeichen** achten.

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$

$(a - b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d - b \cdot c - b \cdot d$

$(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$

Beispiele:

$(x + 5) \cdot (y + 3) = x \cdot y + 3 \cdot x + 5 \cdot y + 5 \cdot 3 = xy + 3x + 5y + 15$

$(2x + 3) \cdot (3x - 5) = 2x \cdot 3x - 2x \cdot 5 + 3 \cdot 3x - 3 \cdot 5 = 6x^2 - 10x + 9x - 15$

$(3x - 1) \cdot (4y - 2) = 3x \cdot 4y - 3x \cdot 2 - 1 \cdot 4y + 1 \cdot 2 = 12xy - 6x - 4y + 2$