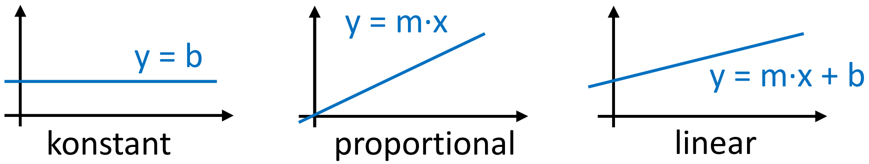
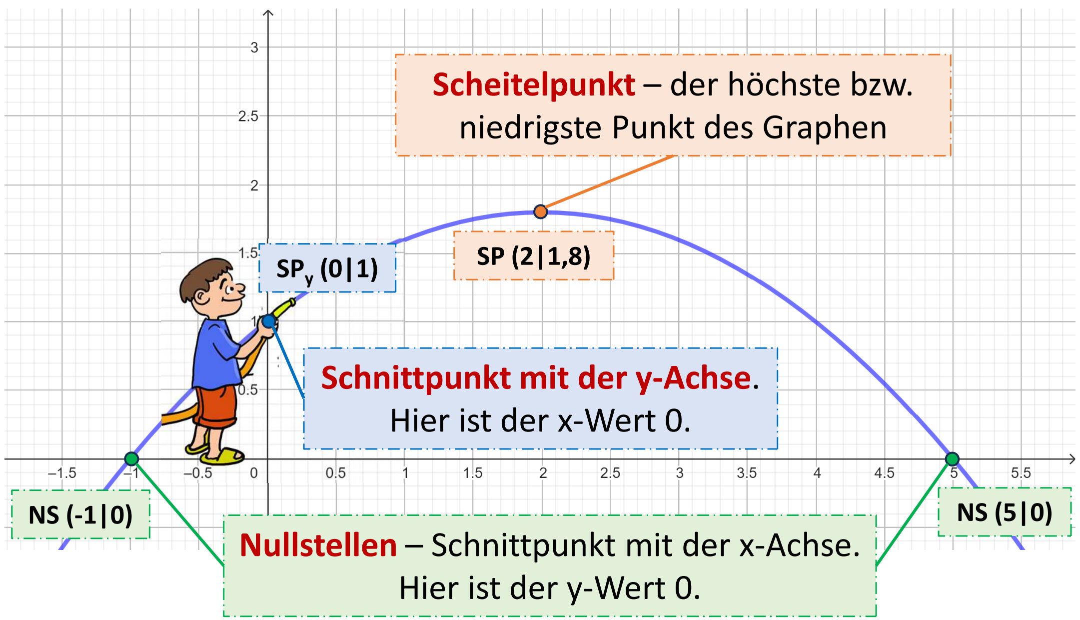
Quadratische Funktionen



Wurfbewegungen lassen sich nicht mit den bisher durchgenommenen Funktionen (konstant, proportional und linear) modellieren. Sie können aber durch **quadratische Funktionen** der Form **$y = ax^2 + bx + c$** beschrieben werden.

Besondere Punkte.

Zur Beschreibung einer quadratischen Funktion, dessen Graph **Parabel** genannt wird, sind die folgenden Punkte sehr wichtig.



Die Normalform

Eine quadratische Funktion in **Normalform** wird durch die Funktionsgleichung **$y = ax^2 + bx + c$** beschrieben.

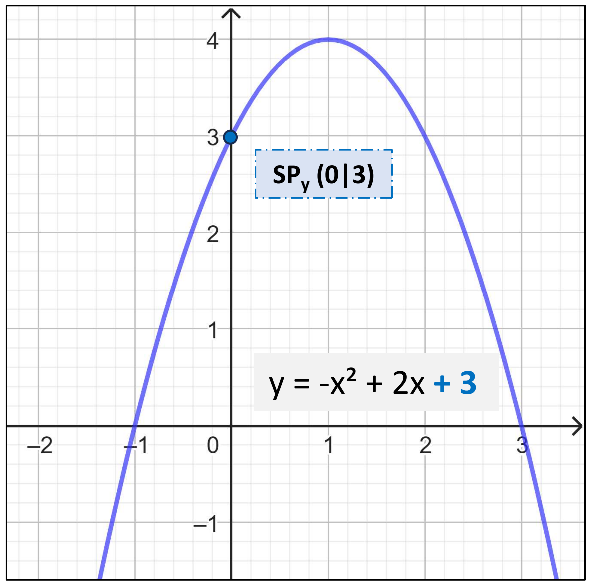
Einfluss auf den Graphen

a ist der **Streckfaktor** der Parabel
Es gilt:

$\lvert a\rvert > 1$	Streckung
$\lvert a\rvert < 1$	Stauchung
$a < 0$	Spiegelung an der x-Achse

c ist eine Verschiebung der Parabel nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$)

Schnittpunkt mit der y-Achse



Beispiel:
$y = -x^2 + 2x + 3$

Zur Bestimmung des **Schnittpunktes mit der y-Achse** muss **$x = 0$** gelten.

$y = -0^2 + 2\cdot 0 + 3$
$y = 3$

SP_y (0|3)

Die **Normalform** **$y = ax^2 + bx + c$** hat den Vorteil, dass der **Schnittpunkt mit der y-Achse** direkt abgelesen werden kann.
Es ist: **$SP_y = (0|c)$**

Die Scheitelpunktform

Eine quadratische Funktion in **Scheitelpunkt-form** wird durch die Funktionsgleichung **$y = a\,(x - d)^2 + e$** beschrieben.

Minus-zeichen beachten!

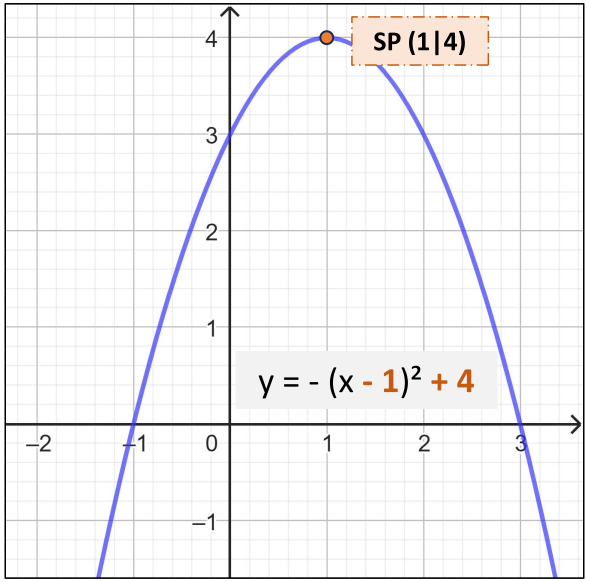
Einfluss auf den Graphen

a ist der **Streckfaktor** der Parabel
Es gilt:

$\lvert a\rvert > 1$	Streckung
$\lvert a\rvert < 1$	Stauchung
$a < 0$	Spiegelung an der x-Achse

d und **e** legen den Scheitelpunkt der Parabel fest. Dieser liegt bei SP (**d**|**e**)

Schnittpunkt mit der y-Achse



Beispiel:
$y = -(x - 1)^2 + 4$

Der Scheitelpunkt von
$y = -(x - d)^2 + e$
ist SP (**d**|**e**)

Vergleich:
$(x - d) = (x - 1) \Rightarrow d = 1$
$+e = +4 \Rightarrow e = 4$

SP (1|4)

Die **Scheitelpunktform** **$y = a\,(x - d)^2 + e$** hat den Vorteil, dass der **Scheitelpunkt** direkt abgelesen werden kann.
Es ist: **SP = (d|e)**

Die faktorisierte Form

Eine quadratische Funktion in **Faktorisierter Form** wird durch die Funktionsgleichung **$y = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$** beschrieben.

Minus-zeichen beachten!

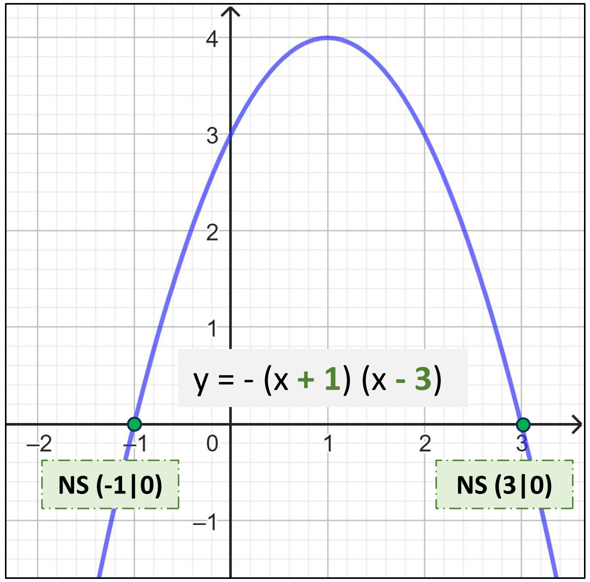
Einfluss auf den Graphen

a ist der **Streckfaktor** der Parabel
Es gilt:

$\lvert a\rvert > 1$	Streckung
$\lvert a\rvert < 1$	Stauchung
$a < 0$	Spiegelung an der x-Achse

m und **n** sind die Nullstellen des Graphen

Schnittpunkt mit der y-Achse



Beispiel:
$y = -(x + 1)(x - 3)$

Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.
Diese überprüfen:

$(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$
$(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$

$NS_1 = (-1|0)$,
$NS_2 = (3|0)$

Die **Faktorisierte Form** **$y = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$** hat den Vorteil, dass die **Nullstellen m** und **n** direkt abgelesen werden kann.
Es ist: **$NS_1 = (m|0)$** und **$NS_2 = (n|0)$**

Um die **Scheitelpunktform** in die **Normalform** umzuwandeln, muss die **Scheitelpunktform** einfach ausmultipliziert werden.

Ausmultiplizieren der Scheitelpunktform

Ohne Streckfaktor

Scheitelpunktform

$y = \underbrace{(x + 4)^2}_{\text{Binomische Formel}} - 5$

$= \overbrace{x^2 + 8x + 16}^{\text{Binomische Formel}} \underbrace{- 5}$

Gleichartige Summanden zusammenfassen

$= x^2 + 8x + 11$

Normalform

Mit Streckfaktor

Scheitelpunktform

$y = -2 \cdot \underbrace{(x + 3)^2}_{\text{Binomische Formel}} - 4$

$= -2 \cdot \overbrace{(x^2 + 6x + 9)}^{\text{Binomische Formel}} - 4$

Distributivgesetz „Ausmultiplizieren“

$= -2x^2 - 12x \underbrace{- 18 - 4}$

Gleichartige Summanden zusammenfassen

$= -2x^2 - 12x - 22$

Normalform

Um die **Normalform** in die **Scheitelpunktform** umzuwandeln, wird die **quadratische Ergänzung** benutzt.

Quadratische Ergänzung

Ohne Streckfaktor

Normalform

$y = x^2 + 8x + 11$

$= x^2 + 8x \qquad + 11$

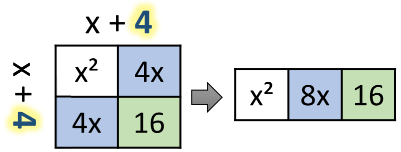
$= x^2 + 8x + 16 - 16 + 11$

$:2 \rightarrow 4 \rightarrow ()^2$

$= \overbrace{(x + 4)^2}^{\text{Binomische Formel}} \overbrace{- 5}^{\text{Rest}}$

Scheitelpunktform

Ergänze zur binomischen Formel und subtrahiere die Zahl direkt wieder



Mit Streckfaktor

Normalform

$y = 2x^2 + 12x + 10$

Streckfaktor ausklammern

$= 2 \cdot (x^2 + 6x + 5)$

Quadratische Ergänzung für die Klammer

$= 2 \cdot (x^2 + 6x \qquad + 5)$

$= 2 \cdot (x^2 + 6x + 9 - 9 + 5)$

Äußere Klammer ausmultiplizieren

$= 2 \cdot ((x + 3)^2 - 4)$

$= 2 \cdot (x + 3)^2 - 8$

Scheitelpunktform

Die Faktorisierte Form → Die Normalform

Um die **Faktorisierte Form** in die **Normalform** umzuwandeln, muss die **Faktorisierte Form** einfach ausmultipliziert werden.

Ausmultiplizieren der Faktorisierten Form

Ohne Streckfaktor

Faktorisierte Form

$y = (x - 2) \cdot (x + 3)$

$= x^2 + 3x - 2x - 6$

Gleichartige Summanden zusammenfassen

$= x^2 + x - 6$

Normalform

Mit Streckfaktor

Faktorisierte Form

$y = -2 \cdot \underbrace{(x - 1) \cdot (x + 4)}$

$= -2 \cdot (x^2 + 4x - x - 4)$

Gleichartige Summanden zusammenfassen

$= -2 \cdot (x^2 + 3x - 4)$

Distributivgesetz „Ausmultiplizieren"

$= -2x^2 - 6x + 8$

Normalform

Die Normalform → Die Faktorisierte Form

Um die **Normalform** in die **Faktorisierte Form** umzuwandeln, hilft es, mit der **PQ-Formel** oder **ABC-Formel** die **Nullstellen** zu berechnen.

PQ-Formel und ABC-Formel

Ohne Streckfaktor

Normalform

$y = x^2 + 2x - 15$

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-15)}$$

ergibt $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$

$y = (x - 3) \cdot (x + 5)$

Faktorisierte Form

PQ-Formel zur Berechnung der Nullstellen

Voraussetzung:
$x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Mit Streckfaktor

Normalform·

$y = 4x^2 - 8x - 12$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12)}}{2 \cdot 4}$$

ergibt $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$

$y = 4 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$

Faktorisierte Form

ABC-Formel zur Berechnung der Nullstellen

Voraussetzung:
$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hinweis: Man kann auch den Streckfaktor **a** vorklammern und mit der PQ-Formel die Nullstellen der Klammer bestimmen.

Die Scheitelpunktform → Die Faktorisierte Form

Um die **Scheitelpunktform** in die **Faktorisierte Form** umzuwandeln, berechnet man durch Umformung die **Nullstellen** der Funktion.

Nullstellen berechnen

Ohne Streckfaktor

Scheitelpunktform

$y = (x-1)^2 - 9$

Nullstellen bestimmen :

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 - 9 &= 0 \quad &| +9\\
(x-1)^2 &= 9 \quad &| \sqrt{\ }\\
x-1 = 3 \quad \text{und} \quad x-1 &= -3 \quad &| +1\\
x_1 = 4 \quad \text{und} \quad x_2 &= -2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow\ y = (x-4)\,(x+2)$

Faktorisierte Form

Mit Streckfaktor

Scheitelpunktform

$y = 2 \cdot (x+5)^2 - 8$

Nullstellen bestimmen :

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (x+5)^2 - 8 &= 0 \quad &| +8\\
2 \cdot (x+5)^2 &= 8 \quad &| :2\\
(x+5)^2 &= 4 \quad &| \sqrt{\ }\\
x+5 = 2 \quad \text{und} \quad x+5 &= -2 \quad &| -5\\
x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 &= -7
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow\ y = 2 \cdot (x+3)\,(x+7)$

Faktorisierte Form

Die Faktorisierte Form → Die Scheitelpunktform

Um die **Faktorisierte Form** in die **Scheitelpunktform** umzuwandeln, sucht man den Scheitelpunkt, dessen x-Wert in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt.

Scheitelpunkt bestimmen

Ohne Streckfaktor

Faktorisierte Form

$y = (x-4) \cdot (x+2) \ \Rightarrow\ m = 4,\ n = -2$

$x_{SP} = \dfrac{m+n}{2} = \dfrac{4+(-2)}{2} = 1$

Einsetzen: $y = (1-4) \cdot (1+2) = -9$

$y = (x-1)^2 - 9$

Scheitelpunktform

Der x-Wert des Scheitelpunktes liegt in der **Mitte** zwischen den Nullstellen **m** und **n**:

Es gilt: $x_{SP} = \dfrac{m+n}{2}$

Der Funktionswert an dieser Stelle liefert den Scheitelpunkt.

Mit Streckfaktor

Faktorisierte Form

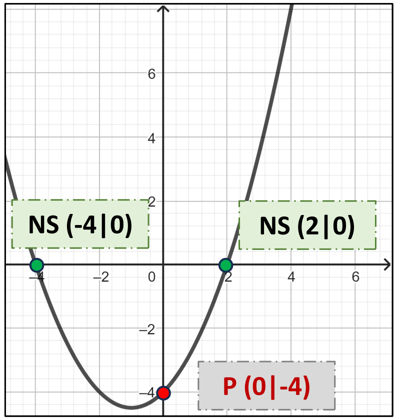
$y = 2 \cdot (x-5) \cdot (x+3) \ \Rightarrow\ m = 5,\ n = -3$

$x_{SP} = \dfrac{m+n}{2} = \dfrac{5+(-3)}{2} = 1$

Einsetzen: $y = 2 \cdot (1-5) \cdot (1+3) = -32$

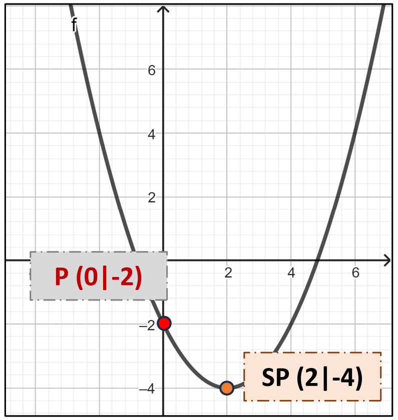
$y = 2 \cdot (x-1)^2 - 32$

Scheitelpunktform



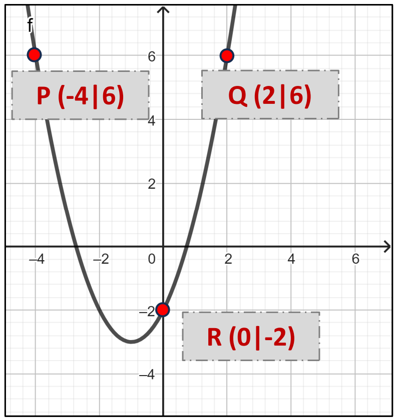
Nullstellen sind abzulesen

Nullstellen: -4 und 2
Faktorisierte Form angeben:
$y = a \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)$
Weiteren Punkt ablesen: **P** (0|-4)
und einsetzen.
$-4 = a \cdot (0 + 4) \cdot (0 - 2) \Rightarrow a = 0{,}5$
$\Rightarrow y = 0{,}5 \cdot (x + 4) \cdot (x - 2)$



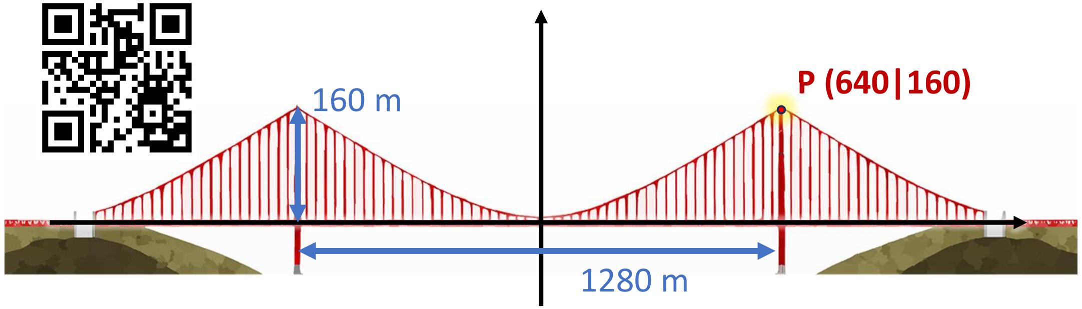
Scheitelpunkt ist abzulesen

Scheitelpunkt: (2|-4)
Scheitelpunktform angeben:
$y = a \cdot (x - 2)^2 - 4$
Weiteren Punkt ablesen: **P** (0|-2)
und einsetzen.
$-2 = a \cdot (0 - 2)^2 - 4 \Rightarrow a = 0{,}5$
$\Rightarrow y = 0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 4$



3 Punkte sind abzulesen

Normalform angeben:
$y = ax^2 + bx + c$
Punkte einsetzen und das
Gleichungssystem lösen
P(-4|6): $6 = a\cdot(-4)^2 + b\cdot(-4) + c$
Q(2|6): $6 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$
P(0|-2): $-2 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c$
$\Rightarrow y = 1x^2 + 2x - 2$



Sollte in einer Modellierungsaufgabe kein Koordinatensystem angegeben sein, dann lege den Ursprung des Koordinatensystems auf den Scheitelpunkt der Parabel.
So erhältst du eine reinquadratische Funktion der Form $y = ax^2$, die man mit Hilfe eines weiteren Punktes bestimmen kann.

Graphen strecken, spiegeln und verschieben

Eine typische Aufgabenstellung ist es, zu erläutern, durch welche Transformationen ein Graph aus dem Graph der Normalparabel $y = x^2$ entstanden ist.

Funktion	Beispiel	Wirkung
$x^2 + c$	$x^2 + 3$	**Verschiebung** um c nach oben
$(x - d)^2$	$(x - 2)^2$	**Verschiebung** um d nach rechts
$a \cdot x^2$	$2x^2$	**Streckung** (|a|>1) oder **Stauchung** (|a|<1) entlang der y-Achse
$-x^2$	$-x^2$	Spiegelung an der x-Achse

$y = -(x + 4)^2 - 1$ entstand aus der Normalparabel durch eine Verschiebung um 4 nach **links**, dann der **Spiegelung an der x-Achse** und schließlich der Verschiebung um 1 nach **unten**.